مسائل

مساله ۱. فرض کنید p یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب مختلط باشد. ثابت کنید z_0 روی دایره واحد هست به‌طوری که

$$|p(z_0)| \geq 1$$

مساله ۲. فرض کنید A, B دو ماتریس روی میدان $\mathbb{R}$ باشند که با هم جابجا می‌شوند. فرض کنید $\det(A+B) \geq 0$. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\det(A^n + B^n) \geq 0$$

مساله ۳. برای یک چندجمله‌ای $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ با ضرایب حقیقی قرار دهید:

$$\Gamma(p) = a_m^2 + a_{m-1}^2 + \cdots + a_0^2$$

فرض کنید $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$ و $g(x)$ را به گونه‌ای پیدا کنید که دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $g(0) = 1$

۲) $\Gamma(f(x)^n) = \Gamma(g(x)^n)$ برای هر $n \geq 1$

مساله ۴. آیا دامنه صحیح $D \subsetneqq \mathbb{R}$ هست که $\mathbb{R}$ میدان کسرهای آن باشد؟

مساله ۵. آیا یک مجموعه‌ی نامتناهی شمارا وجود دارد که یک خانواده‌ی ناشمارا از زیرمجموعه‌های آن باشد بطوری که اشتراک هر دو تا از آنها متناهی باشد؟

مساله ۶. فرض کنید H یک زیرگروه متناهی از گروه توابع پیوسته و یک به یک پوشا از بازه‌ی $[0,1]$ به خودش باشد. نشان دهید $|H| \leq 2$.

مساله ۷. فرض کنید k و n اعداد طبیعی مثبت باشند به طوری که $k > 1$. R را حلقه‌ای در نظر بگیرید (لزومی ندارد یکدار باشد) که در دو شرط زیر صدق کند:

۱) R دارای حداقل یک عضو غیر پوچ‌توان است.

۲) اگر $x_1, x_2, \cdots, x_k$ اعضای ناصفری از حلقه باشند، آنگاه

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = 0$$

نشان دهید که R یک حلقه‌ی تقسیم است.

مساله ۸. فرض کنید C حلقه‌ی توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد ($C^0(\mathbb{R})$) و D حلقه‌ی توابع مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید D زیرحلقه‌ای یکریخت با C ندارد که شامل عنصر همانی حلقه (تابع ثابت ۱) باشد. جمع و ضرب را همان جمع و ضرب مقدار توابع در هر نقطه در نظر می‌گیریم.

مساله ۹. فرض کنید $f : [0,1] \to [0,\infty)$ تابعی پیوسته باشد بطوری که $f(0) = f(1) = 0$ و $f(x) > 0$ برای هر $x \in (0,1)$. ثابت کنید مربعی وجود دارد که دو رأسش روی محور x و دو رأس دیگرش روی نمودار f قرار دارند.

مساله ۱۰. فرض کنید H ماتریس حقیقی، مربعی و متقارن باشد که مقادیر ویژه‌ی متمایز داشته باشد و A ماتریسی حقیقی

با ابعادی مشابه باشد. فرض کنید

$$H_0 = H, H_1 = AH_0 - H_0A, H_2 = AH_1 - H_1A$$

متقارن باشند. ثابت کنید داریم $AA^T = A^TA$.

پاسخ ۱. فرض کنید برای همه‌ی zهای روی دایره واحد داشته باشیم $|p(z)| < ۱$ و قرار دهید $\deg p = n$ (فرض کنید $n \geq ۱$، برای $n = ۰$ بدیهی است). حال قرار دهید $f = -z^n$ و $g = p$. در این صورت برای z در دایره واحد داریم:

$$|g(z)| = |p(z)| < ۱ = |-z^n| = |f(z)|$$

پس $|f| > |g|$ روی دایره واحد و پس طبق قضیه روشه[۱] تعداد ریشه‌های (با احتساب تکرر) f و $f+g$ درون دایره واحد با هم یکسان است، اما f، n ریشه درون دایره دارد و $f+g$ حداکثر $n-۱$ ریشه (زیرا یک چندجمله‌ای درجه $n-۱$ است). این تناقض کار را تمام می‌کند

پاسخ ۲. داریم:

$$A^n + B^n = \prod_{\zeta}(A + B\zeta)$$

که ضرب روی ریشه‌های $x^n + ۱$ حرکت می‌کند. ریشه‌های حقیقی $x^n + ۱$ فقط -۱ است (وقتی n فرد باشد). پس در هر حال می‌توان این ضرب را به شکل

$$A^n + B^n = (A+B)^{\epsilon} \prod_{\zeta}(A + B\zeta)(A + B\bar{\zeta})$$

که البته این‌بار ضرب روی ریشه‌های $x^n + ۱$ در حد ازدواج حرکت می‌کند و ϵ صفر یا ۱ است. پس داریم:

$$\det(A^n + B^n) = \det(A+B)^{\epsilon} \prod_{\zeta} \det(A+B\zeta)(A+B\bar{\zeta})$$

پس کافیست اثبات کنیم برای هر ماتریس M:

$$\det M\overline{M} \geq ۰$$

در واقع داریم:

$$\det M\overline{M} = \det M \det \overline{M} = \det M \overline{\det M} = ||\det M||^۲ \geq ۰$$

پاسخ ۳. تعریف کنید:

$$\gamma(p(x)) = p(x)p(\frac{۱}{x})$$

در این صورت $\Gamma(p)$ ضریب ثابت در چندجمله‌ای لوران[۲] بالا خواهد بود. حال از آنجا که $\gamma(p(x))$ نسبت به $x \mapsto \frac{۱}{x}$ تغییر نمی‌کند و ضربی است، داریم:

$$\begin{aligned}\gamma(f(x)^n) =& \gamma((۳x+۱)^n(x+۲)^n) = \\ & \gamma(۳x+۱)^n\gamma(x+۲)^n = \\ & \gamma(۳x+۱)^n\gamma(\frac{۱}{x}+۲)^n = \\ & \gamma(۳x+۱)^n\gamma(۱+۲x)^n = \\ & \gamma((۳x+۱)(۱+۲x))^n = \\ & \gamma((۶x^۲+۵x+۱)^n)\end{aligned}$$

پس کافیست قرار دهیم $g(x) = ۶x^۲ + ۵x + ۱$.

پاسخ ۴. بله. $\mathbb{R}$ را به شکل توسیع متعالی $\mathbb{Q}$ بنویسید:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}(\{t_\alpha\}_{\alpha \in A})$$

حال قرار دهید: $D = \mathbb{Q}[\{t_\alpha\}_{\alpha \in A}]$. بوضوح D خواص موردنظر را دارد.

پاسخ ۵. بله. اعداد گویا را در نظر بگیرید و برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ یک دنباله از اعداد گویا انتخاب کنید که به α میل کند و اعضای این دنباله را در یک مجموعه‌ی S_α قرار دهید. در این صورت این خانواده از زیرمجموعه‌های اعداد گویا خواص موردنظر را دارد (چرا؟).

پاسخ ۶. فرض کنید g عضوی از H باشد. چون g تابعی پیوسته و یک به یک است پس یکنواست. در نتیجه یا $g(۱) = ۰$ و $g(۰) = ۱$ یا $g(۰) = ۰$ و $g(۱) = ۱$. حال اگر g صعودی باشد و $g(a) < a$ آنگاه $g^n(a) < g^{n-۱}(a) < g(a)$. اما چون g عضوی از گروه متناهی H است پس $g^{|H|} = ۱$ یا همان تابع همانی است.حالتی که g صعودی باشد و $g(a) > a$ نیز مشابه است. پس برای هر $a \in [۰,۱]$، $g(a) = a$. پس تنها عضو

[۱] Rouche
[۲] Laurent

صعودی در H همان تابع همانی است. اگر g و g' نزولی باشند آنگاه $g\circ g'$ صعودی است، پس همانی است و g' وارون g است و در اصل همان g است. پس مرتبه H یا یک است یا دو.

پاسخ ۷. فرض کنید a یک عضو غیر پوچ‌توان در R باشد و x یک عضو ناصفر در آن. طبق شرط دو، $kx^n = 0$ و $(k-1)x^n + a^n = 0$. پس اگر $a^n = e$، برای هر x داریم $x^n = e$. از این نتیجه می‌شود هیچ عنصر پوچ‌توانی در حلقه نیست. هم‌چنین داریم $e^2 = (a^2)^n = e$. ادعا می‌کنیم e همانی حلقه است. ابتدا دقت کنید:

$$ex = a^n x = x^n x = x x^n = xe$$

حال که می‌دانیم x و e جابه‌جا می‌شوند، نتیجه می‌شود:

$$(x-ex)^n = \sum_{i=0}^{n}((-1)^{n-i}\binom{n}{i}x^i(ex)^{n-i}) =$$
$$x^n + e(\sum_{i=0}^{n}((-1)^{n-i}\binom{n}{i}x^n) - x^n) = x^n - ex^n = 0$$

پس $xe = x$ و e همانی حلقه است. پس برای هر x عنصر وارون x^{n-1} وجود دارد. (چون $x^{n+1} = x$ از قضیه‌ی معروفی از ژیکبسون[3] نتیجه می‌شود حلقه جابه‌جایی است. پس R میدان است).

پاسخ ۸. نشان می‌دهیم هر هومومورفیسم حلقه ها از C به D هر تابع را به تابع ثابت تصویر می‌کند. فرض کنید T هومومورفیسمی از C به D باشد. هر تابع f در C را می‌توان به طور یکتا به صورت $f_+ - f_-$ نوشت که $f_+ \geq 0$ و $f_- \geq 0$ و $f_+f_- = 0$. در این صورت چون

$$\begin{aligned}
T(f_+ - f_-) &= T(f_+) - T(f_-),\\
T(f_+f_-) &= T(f_+)T(f_-) = 0,\\
T(f_+) = T(\sqrt{f_+}\sqrt{f_+}) &= T(\sqrt{f_+})T(\sqrt{f_+}) \geq 0,\\
T(f_-) = T(\sqrt{f_-}\sqrt{f_-}) &= T(\sqrt{f_-})T(\sqrt{f_-}) \geq 0
\end{aligned}$$

پس $T(f_+) = T(f)_+$ و $T(f_-) = T(f)_-$. دقت کنید که تابع ثابت ۱ باید به خودش رود. حال فرض کنید $g = T(f)$ و $g'(t_0) \neq 0$ برای یک t_0. چون $T(f - g(t_0)) = g - g(t_0)$ پس $T((f-g(t_0))_+) = (g-g(t_0))_+ \in D$. چون $g'(t_0) \neq 0$ تابع $g - g(t_0)$ در t_0 تغییر علامت می‌دهد. پس یکی از $\lim_{t\to t_0^+}\frac{(g(t)-g(t_0))_+}{t-t_0}$ و $\lim_{t\to t_0^-}\frac{(g(t)-g(t_0))_+}{t-t_0}$ برابر ۰ و دیگری برابر $g'(t_0)$ است. پس تناقض است.

پاسخ ۹. تابع f را با برابر ۰ قرار دادن در نقاط تعریف نشده به روی $(0,\infty)$ گسترش می‌دهیم. اکنون تابع g را که $g(x) = f(x+f(x)) - f(x)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $f(m)$ ماکسیمم باشد برای یک m در $(0,1)$، آنگاه $g(m) \leq 0$. از طرفی چون $0 + f(0) < m$ ، $m + f(m) > m$ پس y در بازه $(0,m)$ قرار دارد که $m = y + f(y)$. پس $g(y) \geq 0$ پس عددی بین m و y وجود دارد که g در آن صفر می‌شود. اکنون دیگر به وضوح میتوانید رأس های مربع را بیابید.

پاسخ ۱۰. با تغییر پایه همزمان همه ماتریس ها با یک ماتریس متعامد، فرض و حکم عوض نمی‌شوند. چون H_0 حقیقی و متقارن است پس می‌توان فرض کرد که H_0 قطری است با مولفه‌های متمایز روی قطرش. چون H_1 متقارن است نتیجه می‌شود که $AH_0 - H_0A = (AH_0 - H_0A)^t = H_0A^t - A^tH_0$ یعنی $(A+A^t)H_0 = H_0(A+A^t)$، پس $(A+A^t)$ نیز قطری است. قرار دهید $D = \frac{1}{2}(A+A^t)$، $S = \frac{1}{2}(A-A^t)$ آنگاه $A = D + S$ و D متقارن است. چون H_2 متقارن است داریم $(A+A^t)H_1 = H_1(A+A^t)$ و $H_1D = DH_1$. چون D و H_0 جابه‌جا می‌شوند، $AH_0 - H_0A = SH_0 - H_0S$ و $D(SH_0 - H_0S) = (SH_0 - H_0S)D$. پس خواهیم داشت $H_0(DS - SD) = (DS - SD)H_0$. در نتیجه $DS - SD$ نیز قطری است. پس D قطری است و قطر S صفر است. پس قطر DS و SD صفر هستند. ولی $DS - SD$ قطری است پس $DS - SD = 0$. حال داریم

$$AA^t - A^tA = (D+S)(D^t+S^t) - (D^t+S^t)(D+S) =$$
$$2((DS-SD)) = 0$$

[3]Jacobson